Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 2

Produktformel für Erwartungswerte

(Buch S. 61)

Sind X_1, X_2 unabhängig mit Werten in S_1 bzw. S_2,
dann gilt für Mengen $A_1 \subset S_1$, $A_2 \subset S_2$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Sind X_1, X_2 unabhängig mit Werten in S_1 bzw. S_2,

dann gilt für Mengen $A_1 \subset S_1$, $A_2 \subset S_2$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Anders geschrieben:

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1) \cdot \mathbf{1}_{A_2}(X_2)] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)]\,\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_2}(X_2)]$$

In Worten:

Der Erwartungswert des Produktes von $\mathbf{1}_{A_i}(X_i)$, $\; i = 1, 2$

ist das Produkt der Erwartungswerte.

Wir werden gleich sehen, dass allgemeiner gilt:

Sind X_1, X_2 unabhängig,

und h_1, h_2 reellwertige “Verarbeitungen”, dann gilt:

Der Erwartungwert des Produktes $h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)$

ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte.

Genauer:

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2,

h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.

Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,

so folgt

$$\mathbf{E}\big[h_1(X_1)h_2(X_2)\big] = \mathbf{E}\big[h_1(X_1)\big]\,\mathbf{E}\big[h_2(X_2)\big]\,.$$

("Produktformel für Erwartungswerte")

Beweis (hier nur für diskrete ZV'e):

$$\mathbf{E}\big[h_1(X_1)h_2(X_2)\big]$$

Trans.f. für

$$= \sum_{(a_1,a_2)\in S_1\times S_2} h_1(a_1)h_2(a_2)\underbrace{\mathbb{P}(X_1=a_1, X_2=a_2)}_{\underset{uA}{=}\mathbb{P}(X_1=a_1)\mathbb{P}(X_2=a_2)}$$

$$= \sum_{a_1\in S_1} h_1(a_1)\mathbb{P}(X_1=a_1) \cdot \sum_{a_2\in S_2} h_2(a_2)\mathbb{P}(X_2=a_2)$$

$$= \mathbb{E}[h_1(X_1)]\,\mathbb{E}[h_2(X_2)]$$

Beweis (hier nur für diskrete ZV'e):

$$\mathbf{E}\big[h_1(X_1)h_2(X_2)\big]$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)h_2(a_2)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1)\,h_2(a_2)\,\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2} h_2(a_2)\,\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}\big[h_1(X_1)\big]\,\mathbf{E}\big[h_2(X_2)\big] \qquad \square$$